Leçon 206 : Exemples d'utilisation de la notion de dimension finie en analyse

Références : Gourdon, El Haje Hassan, Demailly, Hirsch, Berthelin

I - Espaces vectoriels normés de dimension finie
1) Résultats topologiques
2) Applications linéaires
3) Compacité

II - Projection et interpolation
1) Théorème de projection et conséquences
2) Interpolation polynomiale

III - Calcul différentiel et équations différentielles
1) Différentiabilité
2) Quelques résultats d'optimisation
3) Equations différentielles linéaires

DEV 1 : Equivalence des normes et théorème de Riesz

DEV 2 : Différentielle du det et éléments de $SL_n(\mathbb{R})$ de norme minimale.

Leçon 206 : Exemples d'utilisation de la notion de dimension finie en analyse

Dans cette leçon, $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{K}=\mathbb{C}$

I - Espaces vectoriels normés de dimension finie

Soit $(E, \| \|)$ un espace vectoriel normé.

1) Résultats topologiques [GOU]

DEF 1 : Deux normes $\| \|_1$ et $\| \|_2$ sur E sont dites équivalentes lorsque : $\exists a>0, \exists b>0, \forall x \in E, a\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq b\|x\|_1$

REM 2 : Deux normes équivalentes sont topologiquement équivalentes.

DEV 1)a)

THM 3 : Si $\dim(E)<\infty$, toutes les normes sur E sont équivalentes.

REM 4 : Ce résultat n'est plus vrai si $\dim(E)=\infty$: sur l'espace $\mathcal{C}^0([a;b],\mathbb{R})$, $\| \|_1$ et $\| \|_\infty$ ne sont pas équivalentes.

COR 5 : Tout evn de dimension finie est complet

COR 6 : Tout sev de dimension finie d'un evn est fermé

REM 7. Le sous-espace des fonctions polynomiales de $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{C})$ n'est pas fermé (Weierstrass).

2) Applications linéaires [GOU]

Soit $(F, \| \|_F)$ un evn.

THM 8 : Soit $f \in L(E,F)$. LASSE.

(i) f est continue sur E
(ii) f est continue en 0_E
(iii) f est bornée sur $B_f(0,1)$
(iv) f est bornée sur $\mathcal{S}(0,1)$
(v) $\exists M>0, \forall x \in E, \|f(x)\|_F \leq C\|x\|_E$
(vi) f est lipschitzienne
(vii) f est uniformément continue.

REM 9 : En pratique, on utilise le plus souvent (v).

COR 10 : Si $(E, \| \|_E)$ est de dimension finie, toute application linéaire de E dans F est continue.

REM 11 : Soit $f : (\mathbb{R}[X], \| \|_\infty) \to (\mathbb{R}[X], \| \|_\infty)$, $P \mapsto P'$. f n'est pas continue

$\|f(X^n)\|_\infty = n$ et $\|X^n\|_\infty = 1$

3) Compacité [GOU] [HAS] [HIR]

THM 12 : Toute suite bornée d'éléments de E ($\dim(E)<\infty$) admet une sous-suite convergente.

DEV 1)b)

LEMME 13 : (Riesz) ($\dim(E)$ pas forcément finie). Soit F un sev fermé strict de E. Alors : $\forall \varepsilon>0, \exists u \in E, \|u\|=1$ tel que $d(u,F) \geq 1-\varepsilon$.

THM 14 : (Riesz) Soit E un evn. LASSE :
(1) $\dim(E)<\infty$
(2) $B_f(0,1)$ est compacte
(3) Les compacts de E sont les fermés bornés.

EX 15 : • Les compacts de $\mathbb{R}$ sont les segments
• $O_n(\mathbb{R})$ est compact dans $GL_n(\mathbb{R})$.

PROP 16 : Si $\dim(E)<\infty$, toute suite bornée d'éléments de E admettant une unique valeur d'adhérence converge vers cette valeur d'adhérence.

THM 17 : $\exp : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme.

DEF 18 : Soient E, F deux evn et $T \in \mathcal{L}_c(E,F)$. On dit que T est un opérateur compact lorsque $T(B_f(0,1))$ est relativement compacte dans F. On note $K(E,F)$ l'ensemble des opérateurs compacts.

PROP 19. $K(E,F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}_c(E,F)$. Si F est complet, il est fermé dans $\mathcal{L}_c(E,F)$.

PROP 20 : Tout opérateur de rang fini est compact.

COR 21 : Si F est complet, toute limite dans $\mathcal{L}_c(E,F)$ d'opérateurs de rang fini est compact.

THM 22. Soit $T \in K(E,E)$.
1) $\ker(I-T)$ est de dimension finie
2) Si $\dim(E)<\infty$, alors 0 est une valeur spectrale de T.

II - Projection et interpolation

1) Théorème de projection et conséquence [HAS]

Soit $(E, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ un K-espace de Hilbert. Tous les résultats de cette partie sont vrais en dimension finie.

THM 23: Soit $C \subset E$ un convexe fermé non vide. Soit $x \in E$. $\exists! y \in C$, $\|x-y\| = d(x,C) = \inf\{\|x-z\| / z \in C\}$.
Ce point est appelé projeté de x sur C et noté $P_C(x)$.

PROP 24: L'application $P_C : E \to C$ est 1-lipschitzienne donc continue.

REM 25: La conclusion de THM 23 reste vraie si $(E, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ est préhilbertien et $A \subset E$ non vide convexe fermée contenue dans un sev de dimension finie.

THM 26: Soit F un sev fermé de E. Alors, P_F est linéaire, $Im(P_F) = F$, $\ker(P_F) = F^\perp$. $\forall x \in E$, $P_F(x)$ est l'unique $y \in E$ tel que $y \in F$ et $x - y \in F^\perp$.

COR 27: . Si F est un sev de E, on a $E = \bar{F} \oplus F^\perp$
. On a $(\bar{F})^\perp = F^\perp$, $(F^\perp)^\perp = \bar{F}$
. F est dense dans $H \Leftrightarrow F^\perp = \{0\}$.

THM 28: (Représentation de Riesz) L'application
$$\begin{aligned}\Phi : E &\to E^* \\ y &\mapsto \phi_y : \begin{aligned}[t] E &\to K \\ x &\mapsto \langle x|y\rangle\end{aligned}\end{aligned}$$
est une isométrie linéaire surjective.

REM 29: Ce théorème est beaucoup plus facile à démontrer en dimension finie !

COR 30: Soit $T : E \to F$ une application linéaire continue. $\exists! T^* : F \to E$, $\forall x, y \in E$, $\langle T(x)|y\rangle = \langle x|T^*(y)\rangle$
T^* est appelé l'adjoint de T.

PROP 31: Pour $T : E \to F$ linéaire continue, $(T^*)^* = T$; $\|T^*\| = \|T\|$; $\|T^* \circ T\| = \|T \circ T^*\| = \|T\|^2$

REM 32: Si $\dim(E) < \infty$, $\mathcal{L}(E)$ s'identifie à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $A^* = {}^tA$ (ou ${}^t\bar{A}$ si $K = \mathbb{C}$)

PROP 33: Soit $T \in \mathcal{L}_c(E,F)$. $\ker(T^*) = Im(T)^\perp$ et $\ker(T) = Im(T^*)^\perp$.

COR 34: Soit $T \in \mathcal{L}_c(E,F)$. On a :
1) $T(E)$ est dense dans $F \Leftrightarrow T^*$ est injective
2) $T^*(F)$ est dense dans $E \Leftrightarrow T$ est injective.

2) Interpolation polynomiale [DEM]

Soit $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ continue. Soit $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$ $n+1$ points de $[a;b]$ deux à deux distincts.

THM 35: Il existe un unique $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\forall i \in [\![0;n]\!]$, $P_n(x_i) = f(x_i)$. On l'obtient en posant :
$L_i(X) = \prod_{j \neq i} \frac{X - x_j}{x_i - x_j}$ et $P_n(X) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(X)$ où $y_i = f(x_i)$.

THM 36: On suppose que f est $n+1$ fois dérivable sur $[a;b]$. Alors : $\forall x \in [a;b]$, $\exists \xi_x \in]\min(x,x_i); \max(x,x_i)[$ tel que $f(x) - P_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} \pi_{n+1}(x) f^{(n+1)}(\xi_x)$ où $\pi_{n+1}(x) = \prod_{j=0}^{n} (x - x_j)$. En particulier, $\|f - P_n\|_\infty \leq \frac{1}{(n+1)!} \|\pi_{n+1}\|_\infty \|f^{(n+1)}\|_\infty$
(ADMIS)

THM 37: Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique $q_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $d(f, \mathbb{R}_n[X]) = \|f - q_n\|_\infty$. On l'appelle polynôme de meilleure approximation uniforme de f à l'ordre n.

III - Calcul différentiel et équations différentielles

1) Différentiabilité [GOU] Ici $K = \mathbb{R}$

DEF 38: Soient E, F deux $\mathbb{R}$-evn, $U \subset E$ un ouvert et $a \in U$. $f : U \to F$ est dite différentiable lorsqu'il existe $\varphi \in \mathcal{L}_c(E,F)$ telle que $\varphi(a+h) = f(a) + \varphi(h) + \underset{h \to 0}{o}(\|h\|)$
Si φ existe, elle est unique et appelée différentielle de f en a, notée $df(a)$.

REM 39: En dimension quelconque, $df(a)$ dépend a priori des normes $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$ choisies. Cependant, en dimension finie, l'existence et la valeur de $df(a)$ ne dépend pas des normes choisies.

REM 40: $df(a)$ doit être continue ! En dimension finie, c'est automatiquement le cas.

DEF 41 : Soient E, F deux $\mathbb{R}$-evn, $U \subset E$ ouvert et $f : U \to F$ une application. Soit $a \in U$, $v \in E$. Si $\varphi : t \mapsto f(a+tv)$ est dérivable en 0, f est dite dérivable en a suivant v.
On note $f'_v(a) = \varphi'(0) = \lim\limits_{\substack{t \to 0 \\ t \neq 0}} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t}$.

PROP 42 : Si f est différentiable en a, alors f admet une dérivée selon tout vecteur et $f'_v(a) = df(a)(v)$ pour tout $v \in E$.

DEF 43 : Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to F$. Soit $a \in U$ et $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Si pour $i \in [\![1, n]\!]$, f est dérivable en a selon e_i, on dit que f admet une dérivée partielle première et on a $f'_{e_i}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$.

PROP 44 : Si f est différentiable en a, $df(a)(h) = \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ où $h \in \mathbb{R}^n$.

DEF 45 : Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ différentiable en $a \in U$. On appelle matrice Jacobienne de f en a la matrice de $df(a)$ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$.
$$\mathrm{Jac}(f)(a) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$$

2) Quelques résultats d'optimisation [GOU]

PROP 46 : Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ différentiable en a. $df(a) \in (\mathbb{R}^n)^*$ donc : $\exists ! v \in E$, $\forall h \in \mathbb{R}^n$, $df(a)(h) = \langle v | h \rangle$.
On note $v = \nabla f(a)$ et on l'appelle gradient de f en a.

PROP 47 : Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Si f admet un extremum local en $a \in U$, alors $\nabla f(a) = 0$.

DEF 48 : Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ différentiable sur U. On dit que f est deux fois différentiable en a lorsque df est différentiable en a. On note $d^2 f(a) = d(df)(a)$

THM 49 (Schwarz) Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ deux fois différentiable. Alors : $\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$.

DEF 50 : Soit f deux fois différentiable en a. On définit sa matrice Hessienne par : $H_f(a) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right)_{1 \leq i,j \leq n}$.

REM 51 : Cette matrice est symétrique par le théorème de Schwarz.

THM 52 : Soit $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. Soit $a \in \mathcal{U}$ tel que $\nabla f(a) = 0$. Si $H_f(a)$ est définie positive (resp. définie négative) alors f admet un minimum local (resp. maximum local) en a.

THM 53 (Extrema liés) Soient $f, g_1, \dots, g_r : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $M = \{ x \in U / g_1(x) = \dots = g_r(x) = 0 \}$. Si $f_{/M}$ admet un extremum local en $a \in M$ et si les $dg_i(a)$ sont linéairement indépendantes, alors $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$, $df(a) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \, dg_i(a)$.
Ces nombres sont uniques et appelés multiplicateurs de Lagrange.

DEV 2

PROP 54 : $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
$d(\det)(M)(H) = \mathrm{tr}({}^t\mathrm{com}(M) H)$

PROP 55 : Les matrices de $SL_n(\mathbb{R})$ minimisant $\| \cdot \|_2$ sont exactement celles de $SO_n(\mathbb{R})$.

3) Équations différentielles linéaires [BERT]

DEF 56 : Une équation différentielle linéaire est une équation de la forme $y' = A(t)y + B(t)$ $(t, y) \in I \times K^N$ où $A : I \to \mathcal{M}_N(K)$ et $B : I \to K$. (I intervalle de $\mathbb{R}$)
Si $B = 0$, l'équation est dite homogène

THM 57 (Cauchy-Lipschitz linéaire) On suppose A, B continues. Soit $(t_0, y_0) \in I \times K^N$. Il existe une unique solution de $y' = A(t)y + B(t)$ telle que $y(t_0) = y_0$.

PROP 58 : On note S l'ensemble des solutions de $y' = A(t)y + B(t)$ et S_H l'ensemble des solutions de $y' = A(t)y$.
- S_H est un sev de $\mathcal{C}(I, K^N)$. $\forall t_0 \in I$, $\phi : \begin{array}{l} S_H \to K^N \\ y \mapsto y(t_0) \end{array}$ est un isomorphisme donc $\dim(S_H) = N$
- S est un K-espace affine de direction S_H.

MÉTHODE 59 : Pour résoudre $y' = A(t)y(t) + B(t)$, on commence par chercher les solutions de $y' = A(t)y(t)$ (si $A(t) = A \to$ solution en e^{tA}) puis on cherche une solution particulière à l'aide de la méthode de variation de la constante.